Aula 29

Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais:

- Pêndulo: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{L}\text{sen}\,\theta$, Solução: $\theta(t)$
- Decaimento radioactivo: $\dfrac{dy}{dt} = -ky$, Solução: $y(t)$
- Circuito RLC: $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}i = \dfrac{dV}{dt}$, Solução: $i(t)$
- Sistema predador-presa Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y-m)x \\ \frac{dy}{dt} = by - cxy \end{cases},$$

  Solução: $(x(t), y(t))$.

- 2ª Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Leftrightarrow \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}, t),$$

  Solução: $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

- Equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

Solução: $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Equação do Calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 T}{\partial x_n^2} \right),$$

Solução: $T(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Equação das Ondas:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 t} = c^2 \Delta \psi \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2} \right),$$

Solução: $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Equação de Schrödinger:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \phi + V \phi,$$

Solução: $\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- <u>Equações de Maxwell</u>

$$
\begin{aligned}
\mathsf{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
\frac{1}{\mu}\mathsf{rot}\mathbf{B} - \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J} \\
\mathsf{div}\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \\
\mathsf{div}\mathbf{B} &= 0
\end{aligned}
$$

Solução: $\mathbf{E}(t,x,y,z), \mathbf{B}(t,x,y,z)$

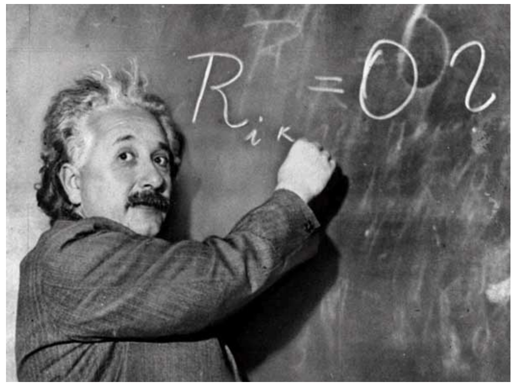
- <u>Equações de Navier-Stokes</u>

$$
\begin{aligned}
\mathsf{div}\,\mathbf{v} &= 0 \\
\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) &= -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Solução: $\mathbf{v}(t,x,y,z), p(t,x,y,z)$

- Equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



Solução: Variedade lorentziana 4 dimensões (espaço-tempo) descrita pela métrica $g_{\mu\nu}$

Classificação de Equações Diferenciais

Definição: Uma equação, ou sistema de equações, diferenciais diz-se:

- **Ordinária** se a solução depende duma unica variável (EDO ou ODE); **Parcial** ou **equação às derivadas parciais** se a solução depende de mais de uma variável e a equação envolve derivadas parciais a mais de uma delas (EDP ou PDE)
- De **ordem** k se $k \in \mathbb{N}$ for a derivada de maior ordem que ocorre na equação.
- **Linear** no caso da incógnita e suas derivadas surgirem na equação em termos lineares; **Não linear**, em caso contrário.

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, dado um intervalo $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, com $-\infty \leq a < b \leq \infty$ diz-se que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma **solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

se

- $\varphi \in C^1(I)$
- o gráfico de φ em I, ou seja, o conjunto $\{(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; t \in I\}$ está contido em Ω.
- Para todo o $t \in I$ verifica-se

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \mathbf{f}(t, \varphi(t)).$$

Se $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ diz-se que φ é **solução do problema de valor inicial** ou **solução do problema de Cauchy**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad (t_0, \mathbf{x}_0)$$

se, além de φ ser solução, também satisfaz

$$\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0.$$